אקונומטריקה א

פרק 2 - אומדי הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

אומדי הריבועים הפחותים:

רקע:

Ordinary Least Squares (OLS) – שיטת האמידה של α ושל β לקבלת אומדים $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$ שיביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה:

$$\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \hat{u}_t^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left[y_t - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t\right)\right]^2 = ?.$$

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$.

	מודל עם חותך ושיפוע $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	מודל ללא חותך $Y_t = \beta X_t + u_t$	מודל רק עם חותך $Y_t = \alpha + u_t$
חישוב האומדים	$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)\left(Y_t - \bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2}$ $= \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)Y_t}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2}$ $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$	$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$	$\hat{\alpha} = \bar{Y}$
תוחלת האומדים	$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$ $E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$	$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$	$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$
שונות האומדים	$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{S_{XX}}$ $V\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}\right)$	$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{T} X_t^2}$	$V\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sigma_u^2}{T}$

"המשוואות הנורמליות" מתקבלות בתהליך הגזירה של פונקציית הריבועים הפחותים וחייבות להתקיים על מנת שהפונקציה תתקיים $\left(\sum \hat{u}_t^2 = \min\right)$:

עבור המודל הקלאסי (עם חותך):

בגזירה של α : $\sum \hat{u}_t = 0$.

בגזירה של β : $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$.

עבור מודל ללא חותך:

בגזירת β בלבד: $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$.

מן המשוואות הנורמליות נובעות:

1. התכונות הגיאומטריות:

   א. $\sum \hat{u}_i = 0$.

   ב. $\sum x_i \hat{u}_i = 0$.

- ברגרסיה <u>ללא שיפוע</u> מתקיימת רק התכונה הגיאומטרית הראשונה.
  ברגרסיה <u>ללא חותך</u> מתקיימת רק התכונה הגיאומטרית השנייה.

2. התכונות האלגבריות:

   א. $\operatorname{cov}(x_i, \hat{u}_i) = 0$.

   ב. $\operatorname{cov}(\hat{y}_i, \hat{u}_i) = 0$.

   ג. $\bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x} = \bar{\hat{y}}$.

- התכונות האלגבריות תקפות עבור קו הרגרסיה הקלאסי (עם חותך ושיפוע) במדגם בלבד.

ההנחות הקלאסיות של מודל הרגרסיה:

1. קיים קשר ליניארי בין המשתנה המוסבר למשתנה המסביר.
2. X איננו קבוע: $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2 \neq 0$.
3. תוחלת ההפרעה האקראית היא אפס לכל תצפית: $E(u_t) = 0$ לכל t.
4. X_t אינם משתנים מקריים $\Leftarrow$ ניתן להוציא אותם מחוץ לתוחלת ולשונות $\Leftarrow$ $\operatorname{cov}(X_t, u_t) = 0$.

5. הומוסקדסטיות: שונות ההפרעה האקראית קבועה לכל תצפית:
$V(u_t)=\sigma_u^2$ לכל t.
6. u_t ב"ת: $\text{cov}(u_t,u_s)=0$ לכל $t\neq s$.
7. ההפרעות האקראיות מתפלגות נורמלית: $u_t\approx N$.

תכונות האומדים:

אומדי הריבועים הפחותים הם ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים.

1. ליניאריות:
אר"פ ניתנים להצגה כטרנספורמציה ליניארית של Y_t.
כדי ש-$\hat{\beta}$ למשל, יהיה אומד ליניארי צריך להתקיים: $\hat{\beta}=\sum W_t\cdot Y_t$.
כאשר W_t היא קומבינציה של ערכי X בדרך כלל. למשל: $\hat{\beta}=\frac{\sum X_t\cdot Y_t}{\sum X_t^2}$.
כדי להביא את האומד לצורה: $\tilde{\beta}=\sum w_t\cdot y_i$ נעזר בשוויון: $\frac{\sum 0}{\sum 0}=\sum\frac{0}{\sum 0}$.
אומד זה ניתן להצגה בצורה הבאה:
$$\hat{\beta}=\sum\frac{X_t}{\sum X_t^2}Y_t=\sum W_t\cdot Y_t$$
$$W_t=\frac{X_t}{\sum X_t^2}$$
לפיכך מדובר באומד ליניארי.

- שימו לב כי:
W_t אסור שיכלול את Y_t.
Y_t אסור שיהיה במכנה או בשורש/חזקה (אלא אם כן במודל הנתון הוא מצוי בשורש/חזקה).

2. חוסר הטיה:

אומד $\hat{\vartheta}$ מסוים יהווה אח"ה לפרמטר ϑ אותו הוא אומד באוכלוסייה אם מתקיים: $E(\hat{\vartheta})=\vartheta$.

כיצד יודעים אם אומד הוא חסר הטיה?

1. בשלב הראשון יש לבצע עבודת הכנה – מבטאים את האומד באמצעות הפרמטר האמיתי – מציבים במקום ה- Y_t את המודל ומפתחים אלגברית.

<table><tr><td>

- יש לזכור כי:

u_t / y_t מהווים משתנים מקריים ⇐ נשארים בתוך התוחלת, השונות וה- $\sum$.

x_t איננו משתנה מקרי (על פי הנחה מס' 4) ⇐ יוצא מחוץ לתוחלת ולשונות אך נשאר בתוך ה- $\sum$ ו- α / β קבועים ⇐ יוצאים מחוץ לתוחלת, לשונות ול- $\sum$.

</td></tr></table>

2. בשלב השני מפעילים תוחלת על האומד המפותח ואם התוחלת שווה לפרמטר האמיתי אז האומד חסר הטייה.

- חוסר הטייה מחייב את התקיימותן של הנחות (3) $E(u_t)=0$ לכל t ו- (4) $\operatorname{cov}(X_t,u_t)=0$.

3. יעילות:

יעילות פירושה השונות הקטנה ביותר. ככל שהשונות של האומד קטנה יותר, כך יש הסתברות גבוהה יותר שהוא יהיה קרוב לפרמטר האמיתי באוכלוסייה אותו הוא אומד.

$\hat{\vartheta}_1$ יקרא אומד יעיל יותר מ- $\hat{\vartheta}_2$ אם מתקיים שהשונות שלו קטנה יותר: $V(\hat{\vartheta}_1)<V(\hat{\vartheta}_2)$.

משפט גאוס מרקוב – אר"פ הם בעלי השונות הנמוכה ביותר בקבוצה שלהם (קבוצת האומדים הלינאריים חסרי ההטיה), והם נקראים: B.L.U.E (Best Linear Unbiased Estimation).

כיצד מחשבים שונות של אומד?

חייבות להתקיים הנחות (4) $\operatorname{cov}(X_t,u_t)=0$, (5) $V(u_t)=\sigma_u^2$ לכל t ו-(6) $\operatorname{cov}(u_t,u_s)=0$ לכל $t \neq s$. אם הן מתקיימות, מחשבים את השונות של האיברים המכילים את u_t מהפיתוח הקודם (לפי כללי הסיגמא והשונות).

4. עקיבות:
ככל שהמדגם יגדל כן יתקרב האומד לערך האמיתי של הפרמטר.
אם נגדיל את המדגם לאינסוף תצפיות ונחשב את האומד, הוא יהיה שווה לפרמטר האמיתי באוכלוסייה: $\begin{pmatrix}\hat{\theta} \to \vartheta\end{pmatrix} \\ (T \to \infty)$.

תנאי הכרחי לעקיבות:
האומד חייב להיות פונקציה של גודל המדגם. במילים אחרות, האומד צריך להיות מושפע מגודל המדגם. ברגע שהאומד עונה על תנאי זה הוא יהיה עקיב.
אומד המחושב במדגם סופי בהגדרה לא יוכל להיות עקיב לפרמטר באוכלוסייה.

סיכום: השלבים להוכחת התכונות:

1. הוכחת ליניאריות.
2. הכנת האומד $\Leftarrow$ להציב במקום Y_t את המודל האמיתי.
   במודל עם חותך: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.
   במודל ללא חותך: $Y_t = \beta X_t + u_t$.
3. פיתוח האלגברה.
4. חישוב תוחלת, שונות, עקיבות.

- ליניאריות מהווה תנאי הכרחי לחוסר הטיה.
- ליניאריות וחוסר הטיה מהוות תנאי הכרחי לבחינת היעילות של האומד לפי משפט גאוס-מרקוב.
- עקיבות איננה תלויה בתכונות האחרות, אלא רק בהיותו של האומד פונקציה של גודל המדגם (לא מחושב על מדגם סופי). כך שאומד לא חייב להיות ליניארי או חסר הטיה כדי להיות עקיב.
- העקיבות משפיעה על היעילות של האומד. עבור אומדים התלויים בגודל המדגם: ככל שגודל המדגם גדול יותר כך שונות האומד קטנה והאומד יהיה יעיל יותר לפרמטר באוכ'.

שאלות:

תרגול ממבחנים:

1) נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, $T = 100$, כאשר מתקיימות כל ההנחות הקלאסיות.

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum_{t=51}^{100} Y_t - \sum_{t=1}^{50} Y_t}{\sum_{t=51}^{100} X_t - \sum_{t=1}^{50} X_t}$.

א. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד חסר הטיה ל- β. נכון / לא נכון

ב. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד עקיב ל- β. נכון / לא נכון

ג. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד ליניארי ל- β. נכון / לא נכון

ד. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד יעיל ל- β. נכון / לא נכון

ה. השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$ היא?

2) נתון המודל: $Y_t = \beta X_t + u_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.
(יש לשים לב המודל ללא חותך).

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum Y_t}{\sum X_t}$.

א. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד מוטה ל- β: נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ב. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן
להסיק כי $\tilde{\beta}$ איננו אומד יעיל יותר
מאומד הריבועים הפחותים: נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

ג. מהי השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$?

3) נתון המודל: $Y_t = \beta X_t + u_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.
(יש לשים לב המודל ללא חותך).

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum \left(X_t - \bar{X}\right)^2}$.

א. מהי התוחלת של $\tilde{\beta}$?

ב. $E\left(\tilde{\beta}\right) < \beta$. נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ג. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי אומד הריבועים הפחותים
הינו אומד יעיל יותר מ- $\tilde{\beta}$. נכון / לא נכון/ לא ניתן לדעת

ד. מהי השונות האמיתית של האומד $\dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2}$?

4) בכל השאלות ההנחות הקלאסיות מתקיימות.
האומדים הם אר"פ, והמודל הוא: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

א. $E(Y_t) = E(\hat{Y}_t)$ — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ב. $\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})\bar{Y} \neq 0$ — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ג. אמידת המודל בשיטת הריבועים הפחותים תיתן את התוצאה: $\sum_{t=1}^{T} u_t = 0$. — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ד. אם נתון ש- $r_{XY} = 0.57$, אזי $\hat{\beta}$:
i. הוא בהכרח שלילי.
ii. הוא בהכרח חיובי.
iii. הוא בהכרח שווה לאפס.
iv. לא ניתן לקבוע את סימנו על סמך הנתונים הקיימים.

ה. סמן את הטענה הנכונה בהכרח:
i. $\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{Y})\hat{u}_t = 0$.
ii. $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} X_t^2 - (T\bar{X})^2$.
iii. $\sum_{t=1}^{T} X_t u_t = 0$.
iv. אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה בהכרח.

ו. אומדי הריבועים הפחותים אינם חסרי הטיה, אם נתון שהשונות של u_t אינה קבועה. — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ז. אומד חסר הטיה הוא אינו בהכרח גם אומד עקיב. — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

תשובות סופיות:

1) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון.
ה. $V\left(\tilde{\beta}\right)=\dfrac{100\sigma_u^2}{\left(\sum_{t=51}^{100}X_t-\sum_{t=1}^{50}X_t\right)^2}$.

2) א. לא נכון. ב. נכון. ג. $V\left(\tilde{\beta}\right)=\dfrac{T\sigma_u^2}{\left(\sum X_t\right)^2}$.

3) א. $E\left(\tilde{\beta}\right)=\dfrac{\beta\sum X_t^2}{\sum\left(X_t-\bar{X}\right)^2}$. ב. לא נכון. ג. לא נכון.
ד. $\dfrac{\sigma_u^2}{\sum X_t^2}$.

4) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. ii.
ה. i. ו. לא נכון. ז. נכון.